

# Frequenzabhängigkeit der Wärmeleistungsausgabe einer Induktionsheizung

Andrea Mozzini Vellen, Naoki Pross, Tim Tönz  
Bachelorstudenten  
OST – Ostschweizer Fachhochschule  
8640 Rapperswil, Switzerland

Prof. Dr. Jasmin Smajic  
Institute of Electromagnetic Fields (IEF)  
ETH Zurich  
8092 Zürich, Switzerland

## I. AUFGABENSTELLUNG

Die Arbeit soll die Ergebnisse der Simulation einer Induktionsheizung aufzeigen und erläutern. Die Induktionsheizung besteht aus einem Aluminiumrohr, welches von einer Kupferspule umwickelt wird. Die  $N$  Windungen erzeugen ein Wechselmagnetfeld, wenn sie von einem Wechselstrom bestromt werden. Im Aluminiumrohr wird das wechselnde  $\mathbf{B}$ -Feld Wirbelströme induzieren. Da das Aluminium eine gewisse Leitfähigkeit hat, werden die Wirbelströme durch ohmsche Verluste Wärme erzeugen. Um das Verhalten der Wirbelströme bei verschiedenen Frequenzen zu untersuchen, wurden mehrere Simulationen mit unterschiedlichen Frequenzen des Wechselstromes durchgeführt.

## II. THEORIE

### A. Elektromagnetische Induktion

Das Faraday'sche Induktionsgesetz ist mathematisch durch die Gleichung

$$\oint_{\partial S} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (1a)$$

$$\iff \nabla \times \mathbf{E}_i = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1b)$$

beschrieben. In Metallen gilt  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ , wobei  $\sigma$  ein konstanter Skalar ist da sie lineare (isotrope) Materialien sind.

### B. Formulierung mit dem magnetischen Vektorpotential

Die rechte Seite der Gleichung (1b) kann bekannterweise mit dem magnetische Vektorpotential  $\mathbf{A}$  ausgedrückt werden:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right).$$

Damit wird das Faraday'sche Gesetz zu

$$\mathbf{J}_i = \sigma \mathbf{E}_i = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2)$$

mit welchem man das magnetoquasistatische Problem

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} &= -\mu (\mathbf{J} + \mathbf{J}_i) = -\mu \mathbf{J} + \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \iff \nabla^2 \mathbf{A} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= -\mu \mathbf{J} \end{aligned} \quad (3)$$

formulieren kann. In unserem Fall, da wir nur harmonische Lösungen betrachten, reduziert sich das Problem auf eine PDE im Frequenzbereich:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - j\omega \mu \sigma \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}. \quad (4)$$

Mit der Geometrie, die in Abbildung 1 dargestellt ist, modellieren wir vereinfacht die Oberflächenstromdichte in der Spule (Gebiet  $\Gamma_s = \{(r, \theta, z) : r = r_a + \delta \text{ und } \xi \leq z \leq h - \xi\}$ ) als

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{N \hat{I} e^{j\omega t}}{h - 2\xi} \hat{\theta}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_s \quad \text{sonst} \quad \mathbf{J} = \mathbf{0}. \quad (5)$$

Die Randbedingungen des Problems sind wegen der Symmetrie durch Neumann Bedingungen gegeben. Diese sind die aus der Physik bekannte Randbedingungen des magnetischen Vektorpotentials. Ist  $\hat{\mathbf{n}}$  der Normalvektor zwischen 2 Materialien, dann ist

$$\mathbf{A}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{A}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{und} \quad (6a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial n} - \frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial n} = -\mu_0 \mathbf{J}_{12}, \quad (6b)$$

wobei die  $\mathbf{J}_{12}$  eine Oberflächenstromdichte ist. Damit ist das Randwertproblem vollständig definiert.

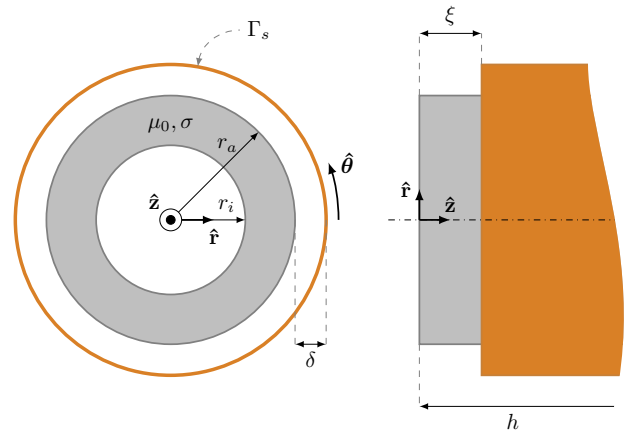


Abbildung 1: Geometrie der Induktionsheizung. Die Angaben sind:  $r_i = 10$  cm,  $r_a = 15$  cm,  $\delta = 1$  cm,  $h = 1$  m,  $\xi = 15$  cm,  $N = 200$ ,  $\sigma = 38$  MS m<sup>-1</sup>,  $\hat{I} = \sqrt{2} \cdot 100$  A.

### C. Thermische Verlustleistung

Die thermische Verlustleistung kann in Metallen mittels des Joule-Lenz Gesetzes berechnet werden. Die elektrische Leistungsdichte  $p$  ist im allgemeinen Fall durch die Gleichung

$$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2 = J^2 / \sigma \quad (7a)$$

beschrieben, oder für harmonische Lösungen, die mit Hilfe von komplexwertige Phasoren  $\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}e^{j\omega t}$  und  $\hat{\mathbf{J}} = \mathbf{J}e^{j\omega t}$  berechnet werden gilt

$$p = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{E}}^* = \frac{\sigma}{2} |\hat{E}|^2 = |\hat{J}|^2 / (2\sigma). \quad (7b)$$

Diese Ohm'sche Verlustleistung wird in Wärmeleistung umgewandelt, dies kann man mit der elektrisch zu thermische Leistungserhaltung  $p = \dot{Q}$  formulieren. Da  $\dot{Q} = \kappa T$ , wobei der Faktor  $\kappa$  die spezifische Wärmekapazität des Gerätes<sup>1</sup> ist, folgt

$$p = \frac{\partial Q}{\partial t} = \kappa \frac{\partial T}{\partial t} \implies T = T_0 + \int \frac{p}{\kappa} dt \quad (8)$$

$$T = T_0 + \int \frac{J^2}{\sigma \kappa} dt. \quad (9)$$

Damit kann man analytisch eine relativ grobe Einschätzung des Temperaturgradienten berechnen. Mithilfe von numerische Rechenmethoden können jedoch sehr realistischer Simulationen durchgeführt werden, in dem man zum Beispiel die Temperaturabhängigkeit von der Leitfähigkeit  $\sigma(T)$  oder Effekte der Wärmeleitungsgleichung und Konvektion mitrechnet. Eine solche Simulation ist im nächsten Abschnitt aufgezeigt.

## III. SIMULATION

Für die Simulation wurde das SIEMENS Programm Simcenter MAGNET® verwendet. Mit dieser Software war es möglich, die zu analysierende Geometrie zu entwerfen (siehe Abbildung 1) und deren Materialien zu definieren. Um die Simulationsgrenzen festzulegen, wurde ein Luftwürfel um den Induktionshofen definiert. Das in Software gezeichnete Modell ist in Abbildung 2a zu sehen.

### A. Definition des Netzes

Für die Definition des Netzes und die damit einhergehende Genauigkeit der Simulation musste die Rechenleistung des PCs berücksichtigt werden, auf dem die Simulationen durchgeführt wurden. Die ersten Testberechnungen wurden mit einer sehr geringen Genauigkeit durchgeführt, bei der es kaum möglich war, Unterschiede in der Intensität der verschiedenen analysierten Felder zu erkennen.

Danach wurde die Maschenweite des Netzes verkleinert, um die Genauigkeit der Berechnungen zu erhöhen. Die Genauigkeit konnte nicht weiter erhöht werden, weil das Programm entweder abstürzte oder zu viel Zeit für eine Simulation benötigte. Tabelle I und II zeigen die Genauigkeitsangaben des Netzes bzw. der Simulation.

<sup>1</sup> $\kappa$  könnte ein (gewichteter) Mittelwert oder eine räumliche Funktion  $\kappa(x, y, z)$  sein.

| Part      | Max. element size | Min. curvature refinement element size |
|-----------|-------------------|--|
| Rohr      | 5 mm              | 0.5 mm                                 |
| Spule     | 5 mm              | 0.5 mm                                 |
| Luftkiste | 50 mm             | 5.0 mm                                 |

Tabelle I: Genauigkeit des Netzes.

| Parameter | Toleranz (in %) |
|-----------|-----------------|
| Newton    | 0.2             |
| CG        | 0.001           |

Tabelle II: Genauigkeit der Simulation.

Abbildung 2b zeigt einen Ausschnitt aus dem Simulationsnetz. Die Genauigkeit im Rohr und in der Spule ist wesentlich höher als in der Luft. Dies um die Stromdichte möglichst realistisch zu berechnen.

### B. Resultate

Die Simulation wurde mehrfach mit der selben Geometrie durchgeführt. Die Parameter wurden identisch gewählt, bis auf die Frequenz des Wechselstroms in der Spule. Die Frequenz wurde in logarithmischen Schritten erhöht in einem Bereich von 10 Hz bis 1 MHz.

Um die 6 Simulationsresultate darzustellen, wurden die Grafiken in Abbildung 5 erzeugt. In Abbildung 5a und 5b sind Kontourdiagramme der Stromdichte  $\mathbf{J}$  im Querschnitt bei der Extremalfälle 10 Hz bzw. 1 MHz aufgezeigt. Figur 5c zeigt ein Längsschnitt des  $\mathbf{B}$ -Feldes.

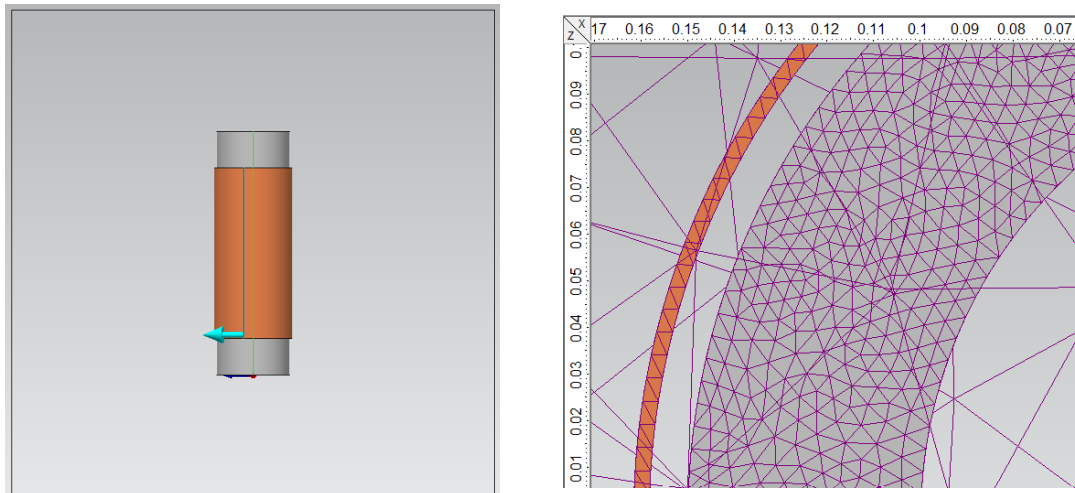
Die beiden interessantesten Ansichten sind die Querschnittsbilder, denn sie zeigen deutlich, wie sich die verschiedenen Felder verhalten und wie stark oder tief die Stromdichte im Aluminiumrohr induziert wird.

Da es sich um einen Ofen handelt wurde auch das thermische Verhalten simuliert. Auch hier wurde festgestellt, dass die Temperatur mit zunehmender Frequenz steigt. Dies stimmt mit den Resultaten in Abbildung 3 überein, da Verlustleistungen nur in Wärme umgewandelt werden können. Die Darstellung der Temperatur der Röhre ist in Abbildung 5d zu sehen, wo zu erkennen ist, dass die Temperatur am unteren Ende der Röhre niedriger ist, während sie am oberen Ende höher ist. Dies lässt sich durch Konvektion der Luft erklären.

### C. Analyse

Analysiert man die Querschnittsbilder, so ist deutlich zu erkennen, dass bei niedrigen Frequenzen die Stromdichte am Rand des Rohres höher ist und bei Annäherung an das Zentrum abnimmt.

Mit zunehmender Frequenz ist jedoch zu erkennen, dass sich die Ströme fast vollständig an den äusseren Rand des Rohres verlagern, während im Inneren praktisch kein Strom fließt. Dieses Verhalten ist auf den bereits bekannten Skin-Effekt zurückzuführen welcher besagt, dass Wechselstromdichten die Tendenz haben sich ungleichmässig in einem Leiter zu verteilen. Wenn die von diesen Ströme



(a) Solides Modell der Simulation.

(b) Das Netz.

Abbildung 2: Geometrie des Modells in SIEMENS Simcenter MAGNET®.

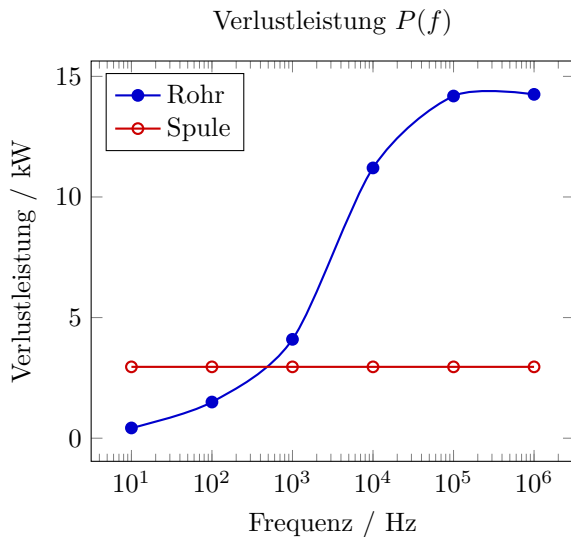


Abbildung 3: Verlustleistung in Abhängigkeit der Frequenz.

erzeugte Verlustleistung gerechnet wird erkennt man einen S-förmigen Trend, welcher in Abbildung 3 gezeigt wird, wenn die  $f$ -Achse logarithmisch dargestellt wird.

Bei DC sind keine Verlustleistungen im Aluminium zu erwarten, da keine Ströme induziert werden. Sobald ein Wechselstrom in der Spule fließt, entsteht nach Biot-Savart eine magnetische Flussdichte  $B_1$ , die proportional zur Strom  $J_1$  in der Spule ist. Im Aluminiumrohr induziert  $B_1$  eine Stromdichte  $J_2 \propto j\omega B_1$  nach Papa Faraday<sup>∇</sup>. Dies erklärt den Anstieg an Verlustleistung im Rohr. Weil  $B_1$  quadratisch mit der Distanz zur Spule abnimmt, wird die induzierte Stromdichte  $J_2$  im Rohr nicht gleichverteilt sein.

Ab 100 kHz fängt die Leistungszunahme abzunehmen. Dies lässt sich erklären, weil  $J_2$  selbst ein  $\mathbf{B}$  Feld  $B_2$  bedingt. Um  $B_2$  wird wieder eine Stromdichte  $J_3 \propto j\omega B_2$

Sättigung der Induzierte Stromdichte

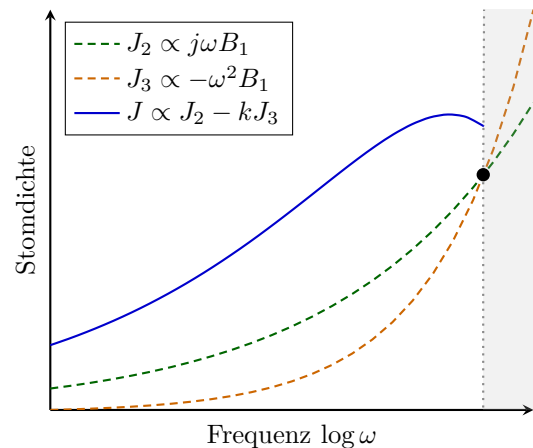


Abbildung 4: Verhältnisse der induzierten Stromdichten.

induziert wird, die entgegen  $J_2$  wirkt. In Abbildung 4 sieht man das lineare bzw. quadratische Wachstum der Stromdichten  $J_2$  und  $J_3$ . Die blaue Linie zeigt wie die Differenz von  $J_2$  und  $J_3$  zu eine Sättigung führt. Die Gegenwirkung von  $J_3$  wirkt ähnlich wie der Skin-Effekt in einem Leiter und drückt die Stromverteilung im Rohr an die Oberflächen. Aber weil  $J_2$  nicht gleichverteilt ist, fließt die Mehrheit vom Strom am äusseren Rand. Wie beim Skin-Effekt wird der effektive Widerstand höher, was die Induktion erschwert mit der Folge, dass die Leistung abnimmt.

#### IV. FAZIT

In der Analyse wurden einige Effekte vernachlässigt, wie magnetische Sättigung. Das Modell ist aber ausreichend um Vorhersagen zu treffen, die mit den simulierten Daten übereinstimmen.

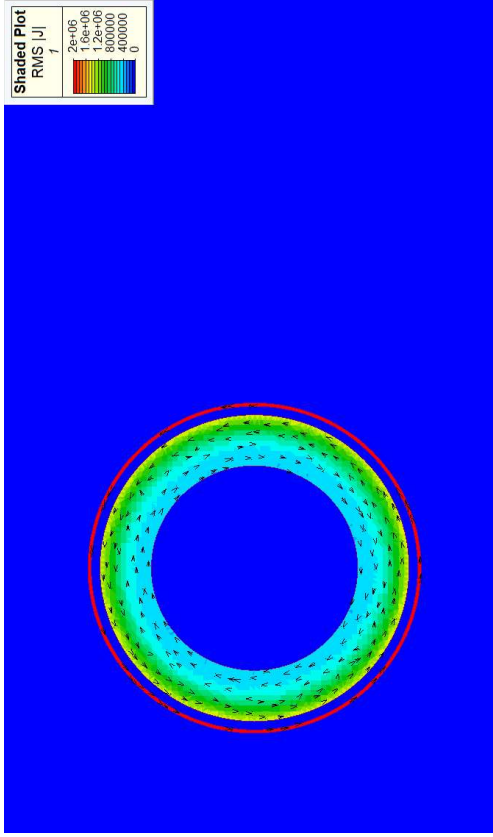
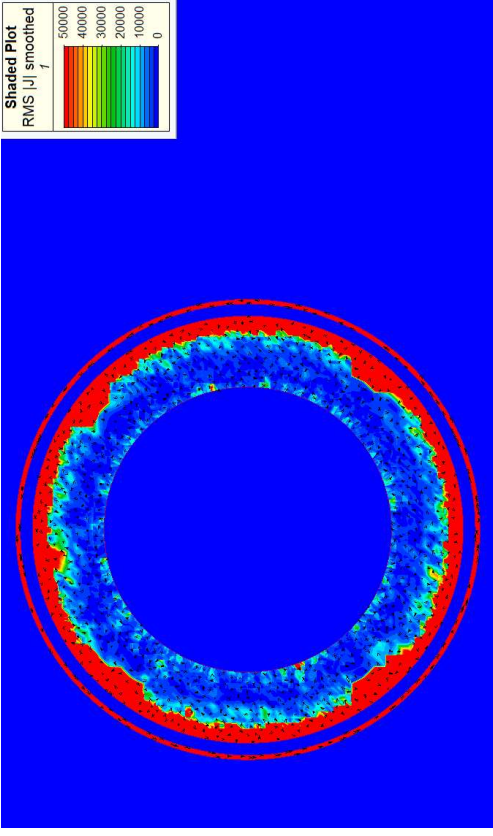
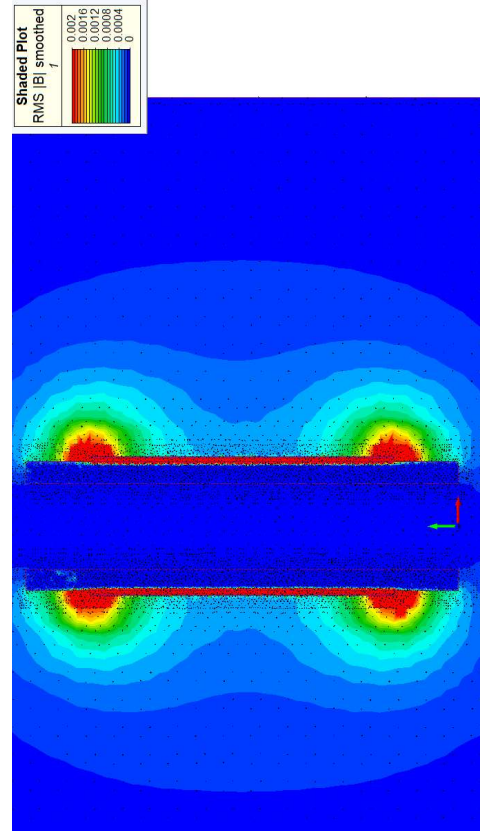
(a) Flussdichte  $\mathbf{J}$  bei  $f = 10$  Hz.(b) Flussdichte  $\mathbf{J}$  bei  $f = 1$  MHz.(c)  $\mathbf{B}$  Feld bei  $f = 1$  MHz.(d) Rohrtemperatur bei  $f = 1$  MHz.

Abbildung 5: Resultate des Simulations mit SIEMENS Simcenter MAGNET®.