Die folgenden Aufgaben sollen dazu dienen, Ihre Fähigkeit im Umgang mit linearer Gleichungssystemen etwas zu vertiefen. Falls das Gleichungungssystem unbestimmte Parameter enthält, achte man sorgfältig darauf, dass man nur umkehrbare Operationen durchführt und keine Fallunterscheidungen vergisst und damit Lösungen verpasst. Selbstverständlich sollte man die behaupteten Lösungen am Schluss der Rechnung auf Korrektheit überprüfen. Spätens dann sollte man sich überlegen, was man eigentlich gerechnet hat.

In der technischen Mechanik kann der Umstand, ob ein lineares Gleichungssystems keine bzw. unendlich viele Lösungen hat, dadurch interpretiert werden, ob das betreffende statische System dynamisch bzw. statisch unbestimmt ist.

1. Man bestimme sämtliche Lösungen folgender linearer Gleichungssysteme:

   (a)
$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 9x_5 &=& 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 &=& 1 \\ -5x_1 + 5x_2 - 10x_3 - 4x_4 - 7x_5 &=& -3 \\ 4x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 2x_4 - 4x_5 &=& 0 \end{array}\right.$$

   (b)
$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 &=& 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &=& 1 \\ -5x_1 + 5x_2 - 10x_3 &=& -3 \\ 4x_1 - 4x_2 + 8x_3 &=& 4 \end{array}\right.$$

2. Gegeben sind die drei Ebenen $\Phi\colon 2x + y - z = 5$, $\Psi\colon 2x - 2y + 8z = -10$ und $\Xi\colon 4y + z = 7$.

   (a) Bestimme den Schnittpunkt $S = \Phi \cap \Psi \cap \Xi$ dieser drei Ebenen.

   (b) Bestimme die Schnittgerade $g = \Phi \cap \Psi$.

   (c) Bestimme den Durchstosspunkt $D = g \cap \Xi$.

   Anschliessend bestimme man für die drei Ebenen Parameterdarstellungen und löse damit die selben Aufgaben.

3. Für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   löse man die beiden Gleichungssysteme $A \cdot \vec{x} = \vec{b}_1$ und $A \cdot \vec{x} = \vec{b}_2$ *simultan*, indem man von der Blockmatrix $(A \mid \vec{b}_1\ \vec{b}_2)$ ausgeht.

4. Man bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die die beiden Punkte $A = (-1, -2, 0)$, $B = (1, 1, 2)$ enthält und auf der Ebene $x + 2y + 2z = 4$ normal steht.

5. Für welche Werte der beiden Parameter $m$ und $n$ besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 4x - my + z = 1 \\ 2x - \phantom{m}y + z = 3 \\ mx - \phantom{m}y - z = n \end{cases}$$

   (a) Genau eine Lösung?

   (b) Keine Lösung.

   (c) Unendlich viele Lösungen.

   Lösen Sie das System für $m = 2$ und $n = -7$.

6. Gegeben ist das Gleichungssystem mit den Parametern $p$ und $q$.

$$\begin{cases} px \phantom{{}+y+(p-1)} - \phantom{2}z = 0 \\ px + y + (p-1)z = q \\ \phantom{px+{}} y + \phantom{(p-1)} 2z = 3 \end{cases}$$

   (a) Genau eine Lösung?

   (b) Keine Lösung?

   (c) Unendlich viele Lösungen.

   Bestimmen Sie im dritten Fall sämtliche Lösungen und deuten Sie sie geometrisch.

## Lösungen

1. (a) Die allgemeine Lösung lässt sich beispielsweise parametrisieren durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zur Kontrolle beachte man, dass der erste, konstante, Vektor als Partikulärlösung das gegebenen Gleichungssystem erfüllt. Die drei restlichen Vektoren erfüllen dagegen das zugehörige homogene System. Geometrisch handelt es sich um einen affinen 3-dimensionalen Teilraum in $\mathbb{R}^5$, der um den ersten Partikulärvektor verschoben ist und durch die drei restlichen Vektoren aufgespannt wird.

(b) Das System hat keine Lösung.

2. (a) Die eindeutig bestimmt Lösung ist der Schnittpunkt $S = (1, 2, -1)$. Sie wird durch den Ortsvektor

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

beschrieben.

(b) Die ersten beiden Ebenen schneiden sich in einer Geraden mit der Parameterdarstellung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Parameter $t = -1$ liefert den Punkt $S \in g$.

(c) Für den Durchstosspunkt gilt selbstverständlich $S = (1, 2, -1)$.

3. Das erste System $A \cdot \vec{x} = \vec{b}_1$ hat keine Lösung und das zweite $A \cdot \vec{x} = \vec{b}_2$ hat die eindeutig bestimmte Lösung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Die gesuchte Ebene kann durch di Koordinatengleichung $2x - 2y + z = 2$ beschrieben werden.

5. Das System hat folgendes Lösungsverhalten:

(a) Genau eine Lösung für $m \neq 2$, $m \neq -3$ und $n$ beliebig. In diesen Fällen schneiden sich also die drei Ebenen in genau einem Punkt.

(b) Keine Lösung für

i. $m = 2$, $n \neq -7$.

ii. $m = -3$, $n \neq -2$.

In diesen Fällen schneiden sich also die drei Ebenen nicht.

(c) Unendlich viele Lösungen für

i. $m = 2$, $n = -7$.

ii. $m = -3$, $n = -2$.

In diesen Fällen schneiden sich also die drei Ebenen mindestens in einer Geraden.

Die Schnittgerade wird durch die Parameterdarstellung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben.

6. Das System hat folgendes Lösungsverhalten:

(a) Genau eine Lösung für $p \neq 2$ und $p \neq 0$.

(b) Keine Lösung für

i. $p = 0$, $q \neq 3$.

ii. $p = 2$, $q \neq 3$.

(c) Unendlich viele Lösungen für

i. $p = 0$, $q = 3$. Sie haben die Parameterdarstellung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ii. $p = 2$, $q = 3$. Sie haben die Parameterdarstellung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

In der zeilenweisen Interpretation schneiden sich dann die drei Ebenen in einer Geraden und die berechnete Lösung liefert eine Parameterdarstellung dieser Schnittgeraden.
In der spaltenweisen Interpretation sind die drei Spaltenvektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

der Koeffizientenmatrix linear unabhängig, d.h. es gibt nichttriviale Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{0}$$

Aus der berechneten Lösungen lesen wir etwa $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -4$ und $\lambda_3 = 2$ ab. Sie entspricht der Linearkombination

$$\vec{a}_1 = 4\vec{a}_2 - 2\vec{a}_3$$

Aus ihr geht hervor, dass $\vec{a}_1$ dann in der Ebene liegt, die von den beiden Vektoren $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ aufgespannt wird.

Zusätzlich liegt dann auch der Konstantenvektor

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

in dieser Ebene, da auf Grund der gefunden Partikulärlösung $3\vec{a}_2 = \vec{b}$ gilt.