Die folgenden Aufgaben sollen zusätzliche Übungsmöglichkeiten im Umgang mit Vektorgeometrie liefern. Beachten Sie, dass Sie zur Lösung neben den vorkommenden Begriffen nichts weiter als die Rechenregeln für den Umgang mit Vektoren (komponentenweises Rechnen), das Skalarprodukt (augemotzter Satz von Pythagoras) und ein taugliches Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme benötigen[1]. Vergessen Sie die Kontrolle am Schluss der Rechnung nicht. All jene, die eine zusätzliche Herausforderung wünschen, überlegen sich, wie die entsprechende Aufgabe in anderen Dimensionen (2 bzw. 4) lauten würde.

1. Gegeben ist die Gerade durch die Punkte $A = (8, 0, -6)$ und $B = (9, 4, -7)$, die zu ihr parallele Gerade durch den Punkt $C = (0, 4, 2)$ und ein Punkt $P = (4, -8, -6)$. Berechne die Koordinaten des Punktes, der von den beiden Geraden gleiche Abstände hat und dem Punkt P am nächsten liegt.

2. Man berechne den spitzen Winkel zwischen den Ebenen $2x + 3y + 4z = 6$ und $3x - 2y - z = -4$.

3. Die Ebene mit den Achsenabschnitten $a = 2$, $b = 3$, $c = -1$ steht normal auf der Ebene mit den Achsenabschnitten $a' = -1$, $b' = 1$ und c'. Wie gross ist c'?

4. Berechne den Neigungswinkel der Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegenüber der Ebene $2x + 3y + 4z = 6$.

5. Berechne die Abstände der Punkte $A = (10, -9, 7)$ und $B = (-8, 7, 0)$ von der Ebene $2x - 2y + z = -6$. Liegen die beiden Punkte auf der gleichen Seite der Ebene und wo sind die beiden Lotfusspunkte?

6. Gegeben ist das Tetraeder mit den Ecken $A = (3, 2, 3)$, $B = (-3, -6, 1)$, $C = (6, -2, 0)$, $D = (0, 5, 2)$. Berechne die Länge der von D ausgehenden Höhe.

7. Man gebe Koordinatengleichungen der beiden Parallelebenen zur Ebene $2x + 2y + z = 8$ im Abstand 4 an.

8. Stelle Koordinatengleichungen der winkelhalbierenden Ebenen der beiden Ebenen $x - 2y + 2z = 9$ und $x + 4y - 8z = 9$ auf.

9. Stelle die Gleichungen der winkelhalbierenden Ebenen der Ebene mit der Koordinatengleichung $2x + y - 2z = 0$ und der Ebene auf, die die Gerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ enthält und zur ersten Ebene normal steht.

[1] Magische Formeln aus Formelsammlungen sind unnötig, weil das Skalarprodukt für alle metrischen Probleme genügt.

10. Welche Punkte auf der Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ haben von den Ebenen $2x + 2y + z = -1$ und $2x - y + 2z = 1$ gleiche Abstände?

11. Berechnen Sie die Zahl m so, dass das von den drei Punkten $A = (6, -5, 5)$, $B = (-2, 7, -3)$ und $C = (2, -2, m)$ im Raum festgelegte Dreieck den Flächeninhalt 28 hat.

12. Man stelle eine Parametergleichung der Geraden auf, die durch den Punkt $P = (1, 0, 3)$ geht und senkrecht zu den beiden Geraden

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist.

13. Man stelle eine Koordinatengleichung der Ebene auf, die durch den Punkt $P = (2, -1, 1)$ geht und normal auf den Ebenen $3x + 2y - z = -4$ und $x + y + z = 3$ steht.

14. Gegeben sind die beiden Ebenen $2x - y + 3z = -4$ und $x + y - 2z = 3$ und der Punkt $P = (2, 0, -1)$. Gesucht ist eine Paramterdarstellung der Geraden, die durch P geht und zu beiden Ebenen parallel ist.

15. Gegeben sind die fünf Punkte $A = (-2, 5, 7)$, $B = (6, 13, 3)$, $C = (6, 6, 11)$, $D = (-2, 11, 9)$, $E = (12, 4, 16)$. Bestimme diejenigen Punkte auf der Geraden DE, die von den Geraden AB und AC gleiche Abstände haben.

Lösungen

1. Der gesuchte Punkt ist $Q = (0, -6, -2)$.
2. Es ist $c' = -6$.
3. Der gesuchte Winkel beträgt $\gamma = 78.6°$.
4. Der gesuchte Winkel beträgt $\gamma = 30.6°$.
5. Die beiden Abstände betragen $d_1 = 17$ und $d_2 = 8$.
6. Die Länge der Höhe ist $d = 3$ und die Ebene ABC kann durch die Koordinatengleichung $2x - 3y + 6z = 18$ beschrieben werden.
7. Die beiden Ebenen werden durch $2x + 2y + z = 20$ und $2x + 2y + z = -4$ beschrieben.
8. Die beiden Ebenen werden durch $x - 5y + 7z = 9$ und $2x - y - z = 18$ beschrieben.
9. Die beiden Ebenen werden durch $4x - y - z = -2$ und $3y - 3z = 2$ beschrieben.
10. Die beiden Punkte $A = (-7, 16, 4)$ und $B = (2.2, -2.4, -5.2)$.
11. Für m kommen nur die beiden Werte $m_1 = -1$ und $m_2 = \frac{75}{13}$ in Frage.
12. Die gesuchte Gerade kann durch die Parameterdarstellung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden.

13. Die gesuchte Ebene kann durch die Koordinatengleichung $3x - 4y + z = 11$ beschrieben werden.
14. Die gesuchte Gerade kann durch die Parameterdarstellung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden.

15. Für die gesuchten Punkte kommen $P_1 = (0, 10, 10)$ und $P_2 = (-6, 13, 7)$ in Frage.