Nimmt man zu den Begriffen der affinen Geometrie noch die metrischen Konzepte Winkel, Abstand dazu, erhält man die Euklidsche Geometrie. Die Aufgaben der Euklidschen Geometrie lassen sich mit Hilfe des aufgemotzten Satzes von Pythagoras

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\gamma)$$

lösen, indem man sie auf lineare Gleichungssysteme reduziert. Die folgenden Aufgaben sollen zur Repetition dienen.

1. Welchen Winkel schliessen die beiden Vektoren $\vec{a} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$ und $\vec{b} = -\vec{e}_1 - 10\vec{e}_3$ ein?

2. Man zeige, dass die drei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   ein rechtwinkliges Dreieck bilden.

3. Beschreibe die Winkelhalbierenden durch Parametergleichungen, die durch den Punkt $A = (3, -2, 1)$ gehen und den Winkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ halbieren.

4. Wie lang ist der auf der Parallelen durch $P = (5, 12, -2)$ zur Geraden

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   liegende Abschnitt zwischen der xy- und der xz-Ebene?

5. Gegeben sind zwei windschiefe Geraden g und h. Eine horizontale Transversale der Länge 5 ist einzuschieben. Auf welcher Höhe kommt sie zu liegen?

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6. Der Vektor $\begin{pmatrix} 7 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ steht auf den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}$ orthogonal. Berechne a und b.

7. Ein Vektor $\vec{x}$ schliesst mit $\vec{e}_1$ den Winkel $60°$ und mit $\vec{e}_3$ den Winkel $45°$ ein. Welchen Winkel schliesst er mit $\vec{e}_2$ ein?

8. Berechne den Zwischenwinkel von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ für die Punkte $A = (5, 7, 3)$, $B = (-3, 3, 4)$, $C(2, -3, 6)$, $D = (3, -1, 4)$.

9. Bestimme die Projektion des Vektors $\overrightarrow{AB}$ auf die Gerade CD für die Punkte $A = (-7, -5)$, $B = (0, -4)$, $C = (10, 1)$, $D = (-6, 13)$.

10. Beweise, dass im Rhombus die Diagonalen normal aufeinander stehen.

11. Gegeben sind die Punkte $A = (-2, 2, 0)$, $B = (-1, 0, 2)$ und die Gerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Gesucht sind die Punkte P auf dieser Geraden, so dass der Winkel $\angle PAB = 45°$ ist.

12. Berechne den Zwischenwinkel von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, wenn $\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b} \rangle = 0$ und $|\vec{a}| = 2|\vec{b}| \neq 0$ ist.

13. Gesucht ist eine Koordinatengleichung der Ebene auf, die durch den Punkt $P = (2, 2, -2)$ geht und zur Ebene $x - 2y - 3z = 0$ parallel ist.

14. Stelle eine Koordinatengleichung der Normalebene durch $P = (-6, 10, 16)$ zur Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ auf.

15. Welcher Punkt auf der Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat von den Punkten $P = (3, 4, 0)$ und $Q = (1, 4, 2)$ gleiche Abstände?

16. Gegeben sind vier Punkte $A = (1, 1, 2)$, $B = (-2, 0, 3)$, $C = (3, -1, -2)$, $D = (0, 3, 3)$. Bestimme den Punkt auf der Normalen durch A zur Ebene ABC, der von C und D gleiche Abstände hat.

17. Stelle eine Koordinatengleichung der Ebene auf, die durch die beiden Punkte $A = (-1, -2, 0)$ und $B = (1, 1, 2)$ geht und normal zur Ebene $x + 2y + 2z = 4$ ist.

18. Stelle eine Parametergleichung der Projektion der Geraden
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$
auf die Ebene $x - 2y + z = 1$ auf.

19. Gegeben ist die Ebene $x + 4y - 3z + 9 = 0$ und der Punkt $P = (0, -5, 5)$. Bestimme den Spiegelpunkt von P bezüglich der Ebene.

20. Ein Lichtstrahl, der von $P = (4, 5, -1)$ nach $Q = (-7, 8, -9)$ geht, wird dazwischen einmal an der Ebene $x + 3y - 2z = 7$ reflektiert. Bestimme den Reflexionspunkt.

21. Ein durch $P = (1, 11, 2)$ gehender, parallel zur y-Achse nach links laufender Lichtstrahl wird an der Kugel mit dem Zentrum im Ursprung und dem Radius 3 reflektiert. In welchem Punkt und unter welchem Winkel schneidet der reflektierte Strahl die xz-Ebene?

22. Von einem Quader ist die Kante $A = (-8, 11, 11)$ und $B = (0, 15, 17)$ gegeben, während man von den andern von A ausgehenden Kanten AD und AE weiss, dass D auf der Geraden durch die Punkte $P = (-10, 0, 17)$ und $Q = (8, 18, 5)$ und E auf der Ebene liegt mit den Achsenabschnitten $a = b = c = 11$. Bestimme alle Ecken des Quaders.

Lösungen

1. Er beträgt $\gamma = 157.9°$.

2. Für die Normen gilt $|\vec{a}|^2 = 21$, $|\vec{b}|^2 = 17$ und $|\vec{c}|^2 = 38$. Damit gilt
$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$$
und die Behauptung folgt aus der Umkehrung des Satzes von Pythagoras.

3. Die beiden Winkelhalbierenden können durch die Parametergleichungen
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix}$$
beschreiben werden.

4. Er hat die Länge $l = 7$.

5. Für einen Punkt $P = (x_1, y_1, z_1)$ auf der Geraden g gilt $x_1 = 2 + t_1$, $y_1 = -1 - t_1$, $z_1 = 2t_1$. Analog gilt für einen Punkt $Q = (x_2, y_2, z_2)$ auf der Geraden h gilt $x_2 = 1 - 2t_2$, $y_2 = 3t_2$, $z_2 = 2 + 2t_2$. Da die Transversale horizontal sein soll, muss die Bedingung $z_1 = z_2$ gelten. Sie liefert die Bedingung $t_1 = -1 + t_2$ für die beiden Parameter. Damit hat der Punkt P die Koordinaten $x_1 = 1 + t_2$, $y_1 = -t_2$, $z_1 = -2 + 2t_2$. Der Richtungsvektor der gesuchten Transversalen lautet also
$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -3t_2 \\ 4t_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
und ist in der Tat horizontal. Weil dieser Vektor die Länge 5 bzw. die Norm 25 haben soll, muss $t_2 = \pm 1$ gelten. Damit liegt die gesuchte Transversale auf einer der beiden Höhen $z_1 = 0$ oder $z_2 = -4$.

6. Es ist $a = 4$ und $b = -5$. Man beachte, dass das Vektorprodukt zur Lösung dieser Aufgabe unnötig ist.

7. Für den dritten Richtungswinkel kommen $\alpha_1 = 60°$ oder $\alpha_2 = 120°$ in Frage. Die hier ersichtliche fehlende Eindeutgkeit macht das Arbeiten mit Winkeln mühsam. Unter anderem deshalb zieht man die lineare Vektorrechnung der überholten Trigonometrie vor.

8. Es ist $\gamma = 131.8°$. Der Leser entschuldige die Verwendung des Winkelmasses!

9. Für die Projektion gilt $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

10. Vergl. die Notizen.

11. Die beiden Punkte sind $P_1 = (1, 2, 3)$ und $P_2 = (-11, -10, 15)$.

12. Für den Zwischenwinkel gilt $\gamma = 146.4°$.

13. Beispielsweise ist $x - 2y - 3z = 4$.
14. Beispielsweise ist $2x - y - 2z + 54 = 0$.
15. Für den gesuchten Punkt gilt $R = (1, -4, 0)$.
16. Für den gesuchten Punkt gilt $P = (4, -4, 6)$.
17. Beispielsweise ist $2x - 2y + z = 2$.
18. Die Gerade wird durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ beschrieben.
19. Es ist $P' = (2, 3, -1)$.
20. Der Reflexionspunkt ist $R = (-1, 2, -1)$.
21. Für den Schnittpunkt gilt $S = (9, 0, 18)$ und für den Winkel $\alpha = 6.38°$.
22. Für die Ecken gilt $C = (1, 7, 21)$, $D = (-7, 3, 15)$, $E = (-1.6, 8.4, 4.2)$, $F = (6.4, 12.4, 10.2)$, $G = (7.4, 4.4, 14.2)$, $H = (-0.6, 0.4, 8.2)$.