Die folgenden Rechenaufgaben sollen zur Repetition des Skalarproduktes $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$, der Norm $|\vec{a}|^2 = \langle\vec{a},\vec{a}\rangle$ (Betragsquadrat) bzw. des Betrags $|\vec{a}| = \sqrt{\langle\vec{a},\vec{a}\rangle}$ (Länge) dienen. Gelgentlich erfordern Anwendungen normierte Vektoren, deren Norm also definitionsgemäss 1 ist.

1. Berechne den Vektor mit dem Betrag 14, der die entgegengesetzte Richtung zum Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{9}{2} \\ 9 \end{pmatrix}$ hat.
2. Die Länge der Strecke mit den Endpunkten $A = (7,3)$ und $B = (-5,y)$ ist 13. Gesucht ist y.
3. Vom Quadrat $ABCD$ sind die beiden Diagonalpunkte $A = (-2,2)$ und $C = (5,1)$ gegeben. Man berechne die beiden anderen Ecken B und D.
4. Welche Punkte der x-Achse und der y-Achse haben von den Punkten $A = (-1,-4)$ und $B = (5,-2)$ gleiche Abstände.
5. Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Kreises durch die drei Punkte $A = (5,7)$, $B = (-1,-1)$ und $C = (6,0)$.
6. Man normiere die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = 3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3$.
7. Bestimme den Einheitsvektor, der zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ entgegengesezt ist.
8. Bestimmen Sie die die Punkte Q, die vom Punkt $P = (3,1,-5)$ in Richtung $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ einen Abstand von 20 Längeneinheiten haben.
9. Man berechne die Skalarprodukte $\langle\vec{a} - 3\vec{b}, 4\vec{c}\rangle$ und $\langle\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{c}\rangle$ für die Vektoren
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$$
10. Zeige, dass die Vektoren $\vec{a} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 10\vec{e}_3$ und $\vec{b} = 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ zueinander orthogonal sind.
11. Zeige, dass die drei Vektoren
$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein orthonormierten Dreibein in $\mathbb{R}^3$ bilden.

12. Zeige, dass der Winkel zwischen einer Seite und der Raumdignalen des n-dimensionalen Würfels mit wachsender Dimension abnimmt.

Lösungen

1. Für den Vektor gilt $\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$.

2. Es ist $y_1 = 8$ und $y_2 = -2$.

3. Es ist $B = (1, -2)$ und $D = (2, 5)$.

4. Es ist $P_1 = (1, 0)$ auf der x-achse und $P_2 = (0, 3)$ auf der y-Achse.

5. Für den Mittelpunkt gilt $M = (2, 3)$ und für den Radius $r = 5$.

6. Die beiden Vektoren

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{89}} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

   haben die Norm 1 und sind Vielfache von $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$.

7. Es ist

$$-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

8. Es ist $Q = (3 + 6\sqrt{2}, 1 - 10\sqrt{2}, -5 + 8\sqrt{2})$.

9. Es ist $\langle \vec{a} - 3\vec{b}, 4\vec{c} \rangle = 288$ und $\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{c} \rangle = 12$.

10. Es ist $|\vec{b}_1|^2 = |\vec{b}_2|^2 = |\vec{b}_3|^2 = 1$. Daher sind die drei Vektoren normiert. Wegen $\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle = 0$ und $\langle \vec{b}_1, \vec{b}_3 \rangle = 0$ sind sie auch paarweise orthogonal, so dass sie tatsächlich ein orthonormiertes Dreibein bilden.

11. Aus Gründen der Ähnlichkeit genügt es, sich auf den Einheitwürfel zu beschränken, der durch die Standardbasisvektoren aufgespannt wird. Aus Symmetriegründen genügt es, sich auf den Winkel zwischen $\vec{e}_1$ und der Diagonale $\vec{d} = \sum_{k=1}^{n} \vec{e}_k$ zu beschränken. Für den Kosinus gilt $\cos(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{n}}$.