Mit Hilfe der Vektoralgebra lassen sich Ebenen und Geraden durch Parametergleichungen der Art

$$\vec{x}(t,s) = \vec{r}_0 + t\vec{a} + s\vec{b}, \qquad \vec{x}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{a}$$

beschreiben. Allgemein spannen die linear unabhängigen[1] Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ den k-dimensionalen affinen Raum durch $\vec{r}_0$, mit der Parameterdarstellung

$$\vec{x}(t_1, \ldots, t_k) = \vec{r}_0 + \sum_{j=1}^{k} t_j \vec{a}_j,$$

auf. Dual dazu lassen sich diese geometrischen Objekte durch Koordinatengleichungen, d.h. durch ein lineares Gleichungssystem beschreiben. Die zugehörigen Umrechnungen führen, wie die meisten Aufgaben der affinen Geometrie, auf das Lösen lineare Gleichungssysteme. Die folgenden Aufgaben sollen zur Repetition dieser Geometrie dienen.

1. Bestimme die Spurpunkte[2] der Geraden durch die Punkte $A = (-4, -2, \frac{16}{3})$ und $B = (3, \frac{3}{2}, -4)$.

2. Liegen die Punkte $A = (3, 8, 9)$ und $B = (1, -10, -8)$ auf der Geraden durch $C = (5, 2, 3)$ und $D = (4, 5, 6)$?

3. Von einer Geraden sind die Spurpunkte $S_1 = (2, -3, 0)$ und $S_2 = (0, -2, 1)$ gegeben. Bestimme den dritten Spurpunkt S_3.

4. Bestimme die gegenseitige Lage folgender beiden Geraden:

   (a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \\ 15 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 4.5 \\ -9 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6.5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

   (b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   (c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

   (d) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

5. Gesucht ist eine Koordinatengleichung der Ebene durch die drei Punkte $A = (1, -1, 2)$, $B = (-2, 0, 3)$ und $C = (3, 1, -2)$.

---

[1] Gelegentlich ist es zweckmässig, auf diese Zusatzvoraussetzung zu verzichten und auch degenerierte affine Räume zu benutzen.

[2] Durchstosspunkte mit den Koordinatenebenen.

6. Stelle eine Koordinatengleichung der Ebene

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

auf.

7. Stelle die Koordinatengleichung einer Ebene mit den Achsenabschnitten a, b und c auf.

8. Liegt der Ursprung auf der Ebene, die durch die Punkte $A = (-2, 0, 1)$, $B = (4, 0, -2)$, $C = (-1, -4, 3)$ aufgespannt wird?

9. Liegen die Punkte $A = (0, 2, 2)$ und $B = (4, 1.5, 4.5)$ auf der Ebene mit der Koordinatengleichung $2x + 3y - 3z + 1 = 0$?

10. Liegen die Punkte $A = (-2, 7, 8)$ und $B = (4, 4, 3)$ auf der Ebene mit der Parametergleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

11. Stelle eine Koordinatengleichung der Ebene auf, die durch die Gerade

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und durch den Punkt $P = (4, 2, 1)$ geht.

12. Gesucht ist eine Koordinatengleichung der Ebene, die sowohl den Punkt $P = (2, -5, 3)$ enthält und zur Ebene

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

parallel ist.

13. Bestimme die Achsenabschnitte und die Gleichungen der Spuren der Ebene mit der Koordinatengleichung $3x - 2y + 4z - 12 = 0$.

14. Stelle eine Gleichung der drei projizierenden Ebenen durch die Gerade

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

auf.

15. Stelle eine Koordinatengleichung der Ebene auf, deren erste Spur[3] die Gleichung $2x+3y-6 = 0$ und deren dritte Spur die Gleichung $x+2z-3 = 0$ hat.

[3]Schnitt mit der ersten Koordinatenebene.

16. Stellen die Parametergleichungen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die selbe Ebene dar?

17. Bestimme den Durchstosspunkt folgender Ebene und Gerade:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

18. Bestimme den Durchstosspunkt folgender Ebenen und Geraden:

    (a) $7x - 5y + 3z = 8, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}.$

    (b) $2x - y + 3z = -1, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

    (c) $2x - y + 3z = -5, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

19. Bestimme den Durchstosspunkt der Ebene $x - y + 2z = 3$ mit der Geraden durch $A = (-1, 0, 4)$ und $B = (1, 2, 0)$.

20. Gesucht ist eine Parametergleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen $x - 2y + z + 3 = 0$ und $x + y - 3z = 2$.

21. Stelle eine Parametergleichung der Schnittgeraden der folgenden Ebenen auf:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

22. Bestimme den Schnittpunkt der folgenden drei Ebenen:

$$4x + 3y + z = 13, \qquad 2x - 5y + 3z = 1, \qquad 7x - y - 2z = -1$$

23. Gegeben sind die vier Punkte $A = (4, 0, -3)$, $B = (5, 2, 0)$, $C = (0, 3, -3)$, $D = (6, -3, 3)$. Stelle eine Koordinatengleichung der Ebenen auf, die durch A und B gehen, und von denen C und D gleiche Abstände haben.

24. Gegeben sind die Punkte $P = (-3, 5, 8)$, $A = (-5, 0, 2)$, $B = (2, 7, 9)$, $C = (2, 4, 0)$, $D = (4, 0, 4)$.

    (a) Stelle eine Parametergleichung derjenigen Transversalen[4] der Geraden AB und CD auf, die durch P geht.

    (b) Bestimme die Endpunkte dieser Transversalen und ihre Länge zwischen den Geraden.

[4] Verbindungsgerade.

Lösungen

1. Die drei Spurpunkte stimmen überein. Es ist $S_1 = S_2 = S_3 = O$.
2. Der Punkt A liegt auf der Gerade; der Punkt B aber nicht.
3. Für den dritten Spurpunkt gilt $S_3 = (-4, 0, 3)$.
4. Für die gegenseitigen Lagen gilt:
   (a) Zusammenfallend.
   (b) Windschief.
   (c) Parallel, aber nicht zusammenfallend.
   (d) Schneidend.
5. Es ist $3x+5y+4z = 6$. Jedes von 0 verschieden Vielfache kommt ebenfalls in Frage, wie das Einsetzen der drei Punkte zeigt.
6. Es ist $12x + 3y + z = 36$. Auch hier sind wieder unendlich viele gleichberechtigte Lösungen möglich.
7. Es ist $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Die Achsenabschnitte lassen sich also nach dem Normieren deer Koordinatengleichung besonders einfach ablesen.
8. Ja, der Ursprung liegt auf dieser Ebene. Wie drückt sich das in einer zugehörigen Koordinatengleichung aus?
9. Der Punkt A liegt nicht darauf, aber der Punkt B.
10. Der Punkt A liegt darauf, nicht aber der Punkt B.
11. Es ist $5x + 4y + 7z = 35$.
12. Es ist $3x - 5y - 4z = 19$.
13. Für die Achsenabschnitte gilt $a = 4$, $b = -6$ und $c = 3$. Die Spuren können durch die Koordinatengleichungen $3x - 2y = 12$, $-2y + 4z = -12$ und $3x + 4z = 12$ beschrieben werden, in denen je eine der drei Koordinaten 0 gesetzt wurde. Selbstverständlich liefern auch nichttriviale Vielfache davon erlaubte Gleichungen.
14. Es ist $5x + 4y = -3$, $6y + 5z = 3$, $-3x + 2z = 3$.
15. Es ist $2x + 3y + 4z = 6$.
16. Die beiden parameterdarstellungen stellen die selbe Ebene dar.
17. Für den Durchstosspunkt ist $S = (-6, 13, 16)$, wie man durch Einsetzen kontrolliert.
18. Für die gegenseitigen Lagen gilt:
   (a) Durchstosspunkt $S = (1, -2, -3)$.
   (b) Die Gerade liegt auf der Ebene.
   (c) Die Gerade ist zur parallel zur Ebene, ohne sie zu schneiden.

19. Für den Durchstosspunkt gilt $S = (0, 1, 2)$.

20. Die Schnittgerade kann durch die Parametergleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden.

21. Die Schnittgerade kann durch die Parametergleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden.

22. Für den Schnittpunkt erhält man $S = (1, 2, 3)$, wie man durch Einsetzen kontrolliert.

23. Die beiden fraglichen Ebenen können durch die Koordinatengleichungen $3x - 3y + z = 9$ oder $5x + 2y - 3z = 29$ beschrieben werden.

    Idee: Man überlege sich, wie das entsprechende Problem in einer Dimension tiefer lautet und wie man das ebene Problem löst. Dann übertrage man den Lösungsweg durch Analogie auf die höhere Dimension. Man beachte insbesondere, dass das Problem zwei unterschiedliche Lösungen hat. Im einen Fall liegen die beiden Punkte C und D auf der selben Seite der Ebene und im anderen Fall liegen sie auf verschiednen Seiten. Die erste Ebene enthält die Punkte A und B und ist parallel zur Geraden CD. Die andere wird durch die Punkte A, B und den Mittelpunkt M der Strecke CD aufgespannt.

24. (a) Die Transversale kann durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ parametrisiert werden.

    (b) Sie schneidet die beiden Geraden in $A = (3, 2, 2)$ und $B = (-1, 4, 6)$, deren Abstand $d(A, B) = 6$ beträgt.

    Idee: Die Gerade AB und der Punkt P spannen eine Ebene auf, die man mit der Geraden CD schneidet.