Die folgenden Rechenaufgaben sollen zur Repetition der Vektoralgebra dienen. Weil sich Vektoren als spezielle Matrizen auffassen lassen, rechnet man mit ihnen genau so wie mit Matrizen und es gelten die selben Rechenregeln wie für das Matrizenrechnen, wo diese sinnvoll sind. Vorwiegend in niedrigen Dimensionen (2 und 3) lassen sich diese Rechnungen zusätzlich einfach geometrisch veranschaulichen. Versuchen Sie sich also jeweils nach jeder Rechnung klar zu machen, was Sie da soeben gerechnet haben und überlegen Sie sich, wie die entsprechende Aufgabe und ihre Lösung in einer beliebigen Dimension aussieht.

1. Für die drei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   berechne man die Linearkombination $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$.

2. Von einem Parallelogramm sind drei aufeinanderfolgende Ecken A, B, C gegeben. Man bestimme die Koordinaten seiner vierten Ecke D.

$$A = (8, -5), \qquad B = (-1, -4), \qquad C = (0, 4)$$

3. Man zerlege den Vektor $\vec{d}$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -16 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 52 \end{pmatrix}$$

4. Man teile die Strecke von $A = (-9, 15, -2)$ nach $B = (-12, -6, 4)$ in drei gleiche Teile. Gesucht sind die Teilpunkte.

5. Bestimme den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC.

$$A = (6, 1, -3), \qquad B = (7, -7, 4), \qquad C = (-4, 0, 5)$$

6. Welche Kraft $\vec{F}$ hebt die Summe der vier Einzelkräfte $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ in ihrer physikalischen Wirkung auf?

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 200 \\ 110 \\ -50 \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} -10 \\ 30 \\ -40 \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_4 = \begin{pmatrix} 40 \\ 85 \\ 120 \end{pmatrix}$$

7. Liegen die drei Punkte $P_1 = (3, 0, 4)$, $P_2 = (1, 1, 1)$ und $P_3 = (-1, 2, -2)$ auf einer Geraden?

Lösungen

1. Für die Linearkombination gilt $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Für die vierte Ecke gilt $D = (9, 3)$. (Figur!)

3. Es ist $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Das zugehörige lineare Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung $x = 4$, $y = 5$, 2. (Figur!)

4. Für die beiden Teilpunkte gilt $T_1 = (-11, 1, 2)$, $T_2 = (-10, 8, 0)$. (Figur!)

5. Für den Schwerpunkt gilt $S = (3, -2, 2)$. (Figur!)

6. Für die Gegenkraft gilt $\vec{F} = -(\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4}) = \begin{pmatrix} -260 \\ -275 \\ -70 \end{pmatrix}$.

7. Ja, weil die Vektoren $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ Vielfache sind.