Die folgenden Aufgaben sollen dazu dienen, Ihre Fähigkeit im Umgang mit dem Eliminationsverfahren weiter zu vertiefen. Selbstverständlich sollte man die behaupteten Lösungen am Schluss der Rechnung auf Korrektheit überprüfen.

Rechnen Sie also zunächst von Hand und benutzen Sie den TR — oder besser: geeignete Software wie das freie CAS Sage oder bzw. das dort enthaltene freie numerische Programm Octave oder halt seine kommerzielle Variante Matlab erst am Schluss zur Kontrolle.

1. Man bestimme sämtliche Lösungen folgender linearer Gleichungssysteme:

(a)
$$\left\{\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 2 \end{aligned}\right.$$

(b)
$$\left\{\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}\right.$$

(c)
$$\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 4 \end{aligned}\right.$$

(d)
$$\left\{\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 3 \\ -x_1 + x_2 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 &= 3 \end{aligned}\right.$$

(e)
$$\left\{\begin{aligned} x_1 - x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}\right.$$

(f)
$$\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}\right.$$

(g)
$$\left\{\begin{aligned} x_1 + x_3 - x_4 + 4x_5 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 + x_5 &= 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 - 18x_4 + 9x_5 &= 8 \end{aligned}\right.$$

(h)
$$\left\{ 3x_1 + 2x_2 = 1 \right.$$

(i)
$$\left\{\begin{aligned} 5x_1 - 7x_2 &= 3 \\ -10x_1 + 14x_2 &= -6 \end{aligned}\right.$$

2. Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & -7 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie den Rang von A und geben Sie die allgemeine Lösung des homogenen Gleichungssystems $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ an. Berechnen Sie dann die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

3. Untersuchen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} 3x + 4y - 7z = 4 \\ 6y - 2z = 0 \\ 3x + 10y - 9z = 1 \end{cases}$$

   (a) Entscheiden Sie, ob das Gleichungssystem eine Lösung hat, indem Sie die Ränge der Matrizen A und $(A \mid \vec{b})$ berechnen.

   (b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems.

   (c) Ersetzen die rechte Seite des Systems durch den Vektor

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   und berechnen Sie, falls möglich, die allgemeine Lösung von $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

   (d) Ersetzen die rechte Seite des Systems durch einen beliebigen Vektor $\vec{b}$ und lösen dann das entstehende System für eine beliebige rechte Seite inklusive Bestimmung der Lösbarkeitsbedingung. Anschliessend bestätigen Sie damit die in den letzten beiden Teilaufgaben gefunden Resultate.

4. Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen den Rang, die allgemeine Lösung des homogenen Systems $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ und des inhomogenen Systems $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

   (a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (c)

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(e)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Im folgenden Quadrat ist in den acht Kästchen eine ganze Zahl einzusetzen so dass die Summe der Zeilen, Spalten und Diagonalen des Quadrates 15 ergibt.

	9	

6. Für welche Werte von α schneiden sich die folgenden vier Ebenen in $\mathbb{R}^3$:

$$y + z = 0, \qquad 2x - y + z = 0, \qquad x + y = 2\alpha, \qquad 2(x - y) + \alpha(z + 1) = 0$$

Geben Sie in jedem Fall die Schnittmenge an.

7. Wir gehen aus von den Daten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ -\beta & \beta & 0 \\ -1 & \alpha & -\alpha \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante $\det(A)$.

(b) Für welche Wertepaare (α, β) besitzt das lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ genau eine Lösung?

(c) Für welche Wertepaare (α, β) besitzt das lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ keine Lösung?

(d) Für welche Wertepaare (α, β) besitzt das lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ unendlich viele Lösungen?

(e) Geben Sie für jedes Wertepaar (α, β) aus der Teilaufgabe (d) die allgemeine Lösung des Systems an.

Lösungen

1. Die Systeme $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ haben die folgenden Lösungsmengen:

   (a) Keine Lösung.

   (b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

   (c) Keine Lösung.

   (d) Keine Lösung.

   (e) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

   (f) $\vec{x} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ (Gerade).

   (g) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} \\ \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{9} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9 \\ 24 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ (Gerade).

   (h) $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ (Gerade).

   (i) $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ (Gerade).

2. Es ist $\text{Rang}(A) = 2 \neq \text{Rang}(A \mid \vec{b}) = 3$. Daher ist die inhomogene Gleichungsystem nicht lösbar. Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist die Ebene durch den Ursprung

$$\vec{x} = t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t, s \in \mathbb{R}.$$

3. (a) Es ist $\text{Rang}(A) = 2 \neq \text{Rang}(A \mid \vec{b}) = 3$. Die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems ist die Gerade durch den Ursprung

$$\vec{x} = t \begin{pmatrix} 17 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

   (b) Als partikuläre Lösung des inhomogenen Systems kann man beispielsweise

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

benutzen. Damit erhält man als allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 17 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

4. (a) $\mathrm{Rang}(A) = 3 \neq \mathrm{Rang}(A, \vec{b}) = 4$. Allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems

$$t \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

(b) $\mathrm{Rang}(A) = 2 = \mathrm{Rang}(A, \vec{b})$. Allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems $\vec{0}$. Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) $\mathrm{Rang}(A) = 3 = \mathrm{Rang}(A, \vec{b})$. Allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems

$$t \begin{pmatrix} 6 \\ -20 \\ -5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R}.$$

Partikuläre Lösung

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -20 \\ -5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R}.$$

(d) $\mathrm{Rang}(A) = 4 = \mathrm{Rang}(A, \vec{b})$. Allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems

$$t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Partikuläre Lösung

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -24 \\ 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -24 \\ 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

(e) $\text{Rang}(A) = 4 \neq \text{Rang}(A, \vec{b}) = 5$. Allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems

$$t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R}.$$

5. Die allgemeine Lösung ist

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -9 \\ 5 \\ 19 \\ 14 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{Z}.$$

6. Für $\alpha = 0$ ist die Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.
   Für $\alpha = 1$ ist die Lösung

$$\vec{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

7. Es ist:

   (a) $\det(A) = -\alpha\beta(\alpha + 2)$.
   (b) Genau eine Lösung, falls $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0 \wedge \alpha \neq 2$.
   (c) Keine Lösung, falls $(\alpha = 0 \wedge \beta \neq \frac{2}{5}) \vee \beta = 0 \vee \alpha = -2$.
   (d) Unendlich viele Lösungen $(\alpha, \beta) = (0, \frac{2}{5})$.