Repetieren Sie alles, was Sie in der Schule über lineare Gleichungssysteme gelernt haben. Dazu gehört insbesondere:

1. Suchen Sie je ein lineares Gleichungssystem mit $2, 3, 4$ Unbekannten und lösen Sie es *von Hand* mit Ihrem Lieblingsverfahren[1]. Denken Sie daran, dass Sie von nun an jeweils die Lösungen von Gleichungssystemen kontrollieren müssen.

2. Zählen Sie in jedem Fall die Anzahl benötigter Additionen (inkl. Subtraktionen) und Multiplikationen (inkl. Divisionen).

3. Suchen Sie je eine Anwendung (Textaufgabe), in der ein lineares Gleichungssystem mit 2 bzw. 3 Unbekannten ein Rolle spielt. Schreiben Sie das System auf und behandeln Sie es dann nach obigem Muster. Formulieren Sie eine analoge Textaufgabe mit 4 Unbekannten und überlegen Sie sich, was dabei geschehen wird.

Die in den letzten drei Aufgaben gefundenen "Baby-Beispiele" sollten Sie während der ganzen Vorlesung zu Hand haben, um sich daran die behandelten Konzepte zu veranschaulichen.

Repetieren Sie alles, was Sie in der Schule über Vektorrechnung gelernt haben. Fundamantal sind die Begriffe der Linearkombination und der linearen Abhängigkeit eines Systems von Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$. Diese Konzepte führen auf gewisse lineare Gleichungssysteme.

Definition. Gegeben sind das System von Vektoren

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$$

und die Skalare $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$. Dann bezeichnet man den Vektor

$$\vec{v} := x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_k\vec{v}_k = \sum_{j=1}^{k} x_j\vec{v}_j$$

als *Linearkombination* des Vektorsystems.

1. Für die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

berechnen Sie die Linearkombinationen $\vec{v} = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$ und $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Kontrollieren Sie Ihre Rechnung an Hand einer Figur!

2. Für die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

[1]Wir werden bald ein effizientes Verfahren besprechen. Vorläufig benutzen Sie die Methode, die man Ihnen in der Schule gezeigt hat oder erfinden eine eigene.

berechnen Sie die Linearkombinationen $\vec{v} = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$ und $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Kontrollieren Sie Ihre Rechnung an Hand einer Figur!

Linearkombinationen eines Vektorsystems dienen dazu, aus gegebenen Vektoren neue zu erzeugen. Statt neue Vektoren aus alten zu synthetisieren, möchte man gelegentlich einen Vektor $\vec{v}$ mit Hilfe der alten analysieren, d.h. als Linearkombination eines Systems zerlegen.

1. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

   Versuchen Sie, die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

   als Linearkombination von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ darzustellen und untersuchen Sie, auf wieviele Arten das jeweils möglich ist.

   Kontrollieren Sie Ihre Rechnung zunächst algebraisch und dann an Hand einer Figur! Wie hätten Sie diese Probleme geometrisch, d.h. ohne Rechnung, dafür mit (Zirkel und) Lineal gelöst?

2. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

   Versuchen Sie, die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   als Linearkombination von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ darzustellen und untersuchen Sie, auf wieviele Arten das jeweils möglich ist.

   Kontrollieren Sie Ihre Rechnung zunächst algebraisch und dann an Hand einer Figur! Wie hätten Sie diese Probleme geometrisch, d.h. ohne Rechnung, dafür mit (Zirkel und) Lineal gelöst?

Man nennt ein System von Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ linear unabhängig, wenn keiner von ihnen überflussig ist, d.h. falls keiner als Linearkombination der anderen dargestellt werden kann. Anderenfalls, d.h. falls mindestens einer eine Linearkombination der übrigen ist, nennt man sie linear abhängig. Dieses wichtige Konzept erklärt man, symmetrischer und zweckmässiger, wie folgt, mit Hilfe der Linearkombination.

Definition. Das System von Vektoren

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$$

heisst *linear unabhängig*, falls die Vektorgleichung

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

nur die triviale Lösung

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$$

hat. Falls eine nichttriviale Lösung existiert, heissen sie *linear abhängig*.

1. Untersuchen Sie, ob die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

   linear abhängig sind oder nicht. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch an Hand einer Figur!

2. Untersuchen Sie, ob die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

   linear abhängig sind oder nicht. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch an Hand einer Figur!

3. Untersuchen Sie, ob die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

   linear abhängig sind oder nicht. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch an Hand einer Figur!

4. Untersuchen Sie, ob die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

   linear abhängig sind oder nicht. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch an Hand einer Figur!

5. Untersuchen Sie, ob die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

   linear abhängig sind oder nicht. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch an Hand einer Figur!

6. Untersuchen Sie, ob die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

   linear abhängig sind oder nicht. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch an Hand einer Figur!

7. In all den vorherigen Teilaufgaben, in denen die Vektoren linear abhängig waren, versuchen Sie mit Hilfe der gefundenen nichttrivialen Lösung jeden der betreffenden Vektoren als Linearkombination der übrigen auszudrücken.

Ein Blick auf die bisherigen Beispiele zeigt, dass es gar keine Rolle spielt, ob die Vektoren 2- bzw. 3-dimensional sind und dass sich die Begriffe sofort sinngemäss auf höhere Dimensionen verallgemeinern lassen, wobei allerdings in höheren Dimensionen das Rechnen aufwändiger wird. Weil das Zeichnen auf einer 2-dimensionalen Tafel nicht nur mühsamer, sondern auch viel unübersichtlicher wird, verzichtet man meistens darauf.

Für die folgenden Aufgaben benutze man folgendes System von Vektoren:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

1. Untersuchen Sie, ob die Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$, $\vec{v}_5$ linear unabhängig sind oder nicht.

2. Untersuchen Sie, ob die Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ linear unabhängig sind oder nicht.

3. Untersuchen Sie, ob die Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ linear unabhängig sind oder nicht.

4. Untersuchen Sie, ob die Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$ linear unabhängig sind oder nicht.

5. Berechnen Sie die Linearkombinationen $\vec{v} = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$ und $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

6. Versuchen Sie, den Vektor $\vec{v}_3$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ darzustellen. und untersuchen Sie, auf wieviele Arten das möglich ist.

7. Versuchen Sie, den Vektor $\vec{v}_5$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ darzustellen. und untersuchen Sie, auf wieviele Arten das möglich ist.