An Hand der folgenden linearen Gleichungssysteme soll nochmals das Eliminationsverfahren geübt werden. Für jedes Beispiel bestimmen Sie zunächst die Anzahl m der Gleichungen und n der Anzahl Unbekannten. Dann bestimmen Sie die erweiterte Matrix $(A \mid \vec{b})$ des betreffenden Systems und berechnen dann mit Hilfe des Eliminationsvefahrens ihre normierte, reduzierte Stufenform $RREF(A \mid \vec{b})$. Schliesslich analysieren Sie diese Normalform, indem Sie den Rang r der Koeffizientenmatrix, die Liste G der gebundenen und die Liste F der freien Variablen und schliesslich die Lösung des Gleichungssystem und des zugehörigen homogenen Systems in Vektorform angeben.

1.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} -7x_1 - 6x_2 - 12x_3 = -33 \\ 5x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 24 \\ x_1 + 4x_3 = 5 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 6x_4 = -7 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 9x_4 = -7 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 8x_4 = -8 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 8 \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 = -12 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 4 \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 2 \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 2 \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} 33x_1 - 16x_2 + 10x_3 - 2x_4 = -27 \\ 99x_1 - 47x_2 + 27x_3 - 7x_4 = -77 \\ 78x_1 - 36x_2 + 17x_3 - 6x_4 = -52 \\ -9x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 6 \\ -x_1 + 4x_2 = -14 \\ 3x_1 + 10x_2 = -2 \\ 3x_1 - x_2 = 20 \\ 6x_1 + 9x_2 = 18 \end{cases}$$

8.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ -x_1 + 4x_2 = 6 \\ 3x_1 + 10x_2 = 2 \\ 3x_1 - x_2 = -1 \\ 6x_1 + 9x_2 = 3 \end{cases}$$

9.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_4 + 7x_6 - 9x_7 = 3 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 + 3x_4 + 9x_5 - 13x_6 + 7x_7 = 9 \\ 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 + 12x_6 - 8x_7 = 1 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 8x_5 - 31x_6 + 37x_7 = 4 \end{cases}$$

10.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 9x_4 + 3x_5 - 5x_6 - 2x_7 + x_8 + 27x_9 = -5 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 + 4x_6 + 10x_7 + 2x_8 - 23x_9 = 18 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 + 5x_7 + 2x_8 - 7x_9 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 7x_5 + 2x_6 + 4x_7 - 11x_9 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_4 + 2x_5 - 4x_6 + 3x_7 + 8x_8 + 13x_9 = -4 \\ -3x_1 - 6x_2 - x_3 - 13x_4 + 2x_5 - 5x_6 - 4x_7 + 13x_8 + 10x_9 = -29 \end{cases}$$

Lösungen

1. $m = 3, n = 3,\ r = 2,\ G = \{1, 2\},\ F = \{3\}.$

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$$RREF(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. $m = 3, n = 3,\ r = 3,\ G = \{1, 2, 3\},\ F = \{\}.$

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -7 & -6 & -12 & -33 \\ 5 & 5 & 7 & 24 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

$$RREF(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. $m = 3, n = 4,\ r = 3,\ G = \{1, 2, 3\},\ F = \{4\}.$

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & -6 & -7 \\ 4 & 1 & 2 & 9 & -7 \\ 3 & 1 & 1 & 8 & -8 \end{array}\right)$$

$$RREF(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. $m = 3, n = 4,\ r = 2,\ G = \{1, 2\},\ F = \{3, 4\}.$

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 7 & -7 & 8 \\ -3 & 4 & -5 & -6 & -12 \\ 1 & 1 & 4 & -5 & 4 \end{array}\right)$$

$$RREF(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. $m = 3, n = 4$, $r = 2$, $G = \{1, 2\}$, $F = \{3, 4\}$.

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 7 & -7 & 2 \\ -3 & 4 & -5 & -6 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

$$RREF(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

Die Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems lautet

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. $m = 4, n = 4$, $r = 4$, $G = \{1, 2, 3, 4\}$, $F = \{\}$.

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 33 & -16 & 10 & -2 & -27 \\ 99 & -47 & 27 & -7 & -77 \\ 78 & -36 & 17 & -6 & -52 \\ -9 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

$$RREF(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem hat die Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

7. $m = 5, n = 2$, $r = 2$, $G = \{1, 2\}$, $F = \{\}$.

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 4 & -14 \\ 3 & 10 & -2 \\ 3 & -1 & 20 \\ 6 & 9 & 18 \end{array}\right)$$

$$RREF(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem hat die Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

8. $m = 5, n = 2$, $r = 2$, $G = \{1, 2\}$, $F = \{\}$.

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 6 \\ 3 & 10 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

$$RREF(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

Das zugehörige homogene Gleichungssystem hat die triviale Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

9. $m = 4, n = 7$, $r = 3$, $G = \{1, 3, 4\}$, $F = \{2, 5, 6, 7\}$.

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 7 & -9 & 3 \\ 2 & 8 & -1 & 3 & 9 & -13 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -4 & 12 & -8 & 1 \\ -1 & -4 & 2 & 4 & 8 & -31 & 37 & 4 \end{array}\right)$$

$$RREF(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

10. $m = 6, n = 9$, $r = 3$, $G = \{1, 3, 5, 6\}$, $F = \{2, 4, 7, 8, 9\}$.

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 2 & -2 & 9 & 3 & -5 & -2 & 1 & 27 & -5 \\ 2 & 4 & 3 & 4 & -1 & 4 & 10 & 2 & -23 & 18 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 5 & 2 & -7 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 4 & -7 & 2 & 4 & 0 & -11 & 20 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 2 & -4 & 3 & 8 & 13 & -4 \\ -3 & -6 & -1 & -13 & 2 & -5 & -4 & 13 & 10 & -29 \end{array}\right)$$

$$RREF(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 3 & 5 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_5 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$