1. Man löse die folgenden linearen Gleichungssysteme mit Elimination:

(a)

$$\left\{\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}\right.$$

(b)

$$\left\{\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -15 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \\ -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 30 \end{aligned}\right.$$

(c)

$$\left\{\begin{aligned} 4x_1 - 8x_2 &= 12 \\ 3x_1 - 6x_2 &= 9 \\ -2x_1 + 4x_2 &= -6 \end{aligned}\right.$$

(d)

$$\left\{\begin{aligned} 10y - 4z + w &= 1 \\ x + 4y - z + w &= 2 \\ 3x + 2y + z + 2w &= 5 \\ -2x - 8y + 2z - 2w &= -4 \\ x - 6y + 3z &= 1 \end{aligned}\right.$$

(e)

$$\left\{\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}\right.$$

(f)

$$\left\{\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 &= 5 \end{aligned}\right.$$

(g)

$$\left\{\begin{aligned} w + 2x - y &= 4 \\ x - y &= 3 \\ w + 3x - 2y &= 7 \\ 2u + 4v + w + 7x &= 7 \end{aligned}\right.$$

(h)

$$\left\{\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}\right.$$

(i)

$$\left\{\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}\right.$$

(j)

$$\begin{cases} \phantom{w +{}} 2x + 2y + 4z = 0 \\ w - y - 3z = 0 \\ 2w + 3x + y + z = 0 \\ -2w + x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

2. Welche Bedingungen müssen b_1, b_2, b_3 erfüllen, damit folgende Gleichungssysteme konsistent (lösbar) sind?

   (a)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = b_1 \\ x_1 + x_3 = b_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = b_3 \end{cases}$$

   (b)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = b_2 \\ x_1 + 8x_3 = b_3 \end{cases}$$

   Man entscheide mit dem jeweiligen Lösbarkeitskriterium, ob die Koeffizientenmatrix A invertierbar ist und berechne im Fall, wo sie invertierbar ist, ihre Inverse A^{-1}. Dann überprüfe man die mit dem Eliminationsverfahren gefundene Lösung mit jener, die sich aus der Formel $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$ ergibt.

3. Für welche Werte von $a, b, c \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 4y - 6z = 2a \\ x - 2y + 7z = b \\ 2x + 6y - 11z = c \end{cases}$$

   (a) Keine Lösung.
   (b) Genau eine Lösung.
   (c) Unendlich viele Lösungen. (Dimension?)

   In allen Fällen gebe man eine geometrische Interpretation.

4. Diskutieren Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} \phantom{ax +{}} ay + z = -b \\ ax + bz = -1 \\ ax + ay + 2z = -2 \end{cases}$$

   vollständig mit Angabe der entsprechenden Lösungen und geometrischer Interpretation der Verhältnisse.

5. Für welche rechte Seite ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = b_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = b_2 \\ \phantom{x_1 +{}} x_2 + 2x_3 + x_4 = b_3 \end{cases}$$

   lösbar? Man bestimme dann die Lösung und den Rang der Koeffizientenmatrix.

6. Für welche Werte der Parameter a und b haben die Gleichungssysteme genau eine, keine, unendlich viele Lösungen?

   (a)
$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ ax + by = b \end{cases}$$

   (b)
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 4z = 5 \\ x + 4y + az = b \end{cases}$$

   (c)
$$\begin{cases} 4x - ay + z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ ax - y - z = b \end{cases}$$

   Im letzten Fall löse man das System für $a = 2$, $b = -7$.

7. Für welche Werte von λ haben folgende homogenen Gleichungssysteme nichttriviale Lösungen? In jedem Fall bestimme man sie alle.

   (a)
$$\begin{cases} (\lambda - 3)x + y = 0 \\ x + (\lambda - 3)y = 0 \end{cases}$$

   (b)
$$\begin{cases} -\lambda x - 2z = 0 \\ x + (2 - \lambda)y + z = 0 \\ x + (3 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

   (c)
$$\begin{cases} (1 - \lambda)x = 0 \\ -x + (3 - \lambda)y = 0 \\ -3y - \lambda z = 0 \end{cases}$$

   (d)
$$\begin{cases} (2 - \lambda)x - y = 0 \\ -x + (2 - \lambda)y - z = 0 \\ -2y + (2 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

8. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ hat das homogene lineare Gleichungssystem (sogn. Eigenwertsystem)
$$(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$$
   nichttriviale Lösungen? In jedem Fall bestimme man für diese Werte von λ sämtliche solchen Lösungen.

   (a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

9. Wir gehen von folgender Matrix aus:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Bestimmen Sie ihrer Rang.
   (b) Unsersuchen Sie, ob ihre Spaltenvektoren ein Rechts- oder ein Linkssystem bilden und wie gross das von ihnen aufgespannte Volumen ist.
   (c) Untersuchen Sie, ob ihre Spaltenvektoren linear abhängig sind und geben Sie allenfalls eine solche Abhängigkeit an.
   (d) Untersuchen Sie ihre Inverse, falls sie existiert.
   (e) Bestimmen Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.
   (f) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ hat das homogene lineare Gleichungssystem

$$(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

   nichttriviale Lösungen? In jedem Fall bestimme man für diese Werte von λ sämtliche solchen Lösungen.

10. Berechne folgende Determinanten:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & a & 2 \end{pmatrix}, \qquad \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & a & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

11. Bestimme $a \in \mathbb{R}$ so, dass folgende Determinante 720 beträgt.

$$\det \begin{pmatrix} a & 6 & 6-a \\ 6 & 6 & 6 \\ 6-a & 6 & a \end{pmatrix}$$

12. Entscheide, für welche Parameter $a \in \mathbb{R}$ folgende Matrix invertierbar ist und berechne dann ihre Inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & 0 \\ a & 1 & \frac{1}{a} \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

13. Berechne den Rang folgender Matrix in Abhängigkeit des Parameters a.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Lösungen

Sie finden hier bewusst nur einige der Lösungen, weil Sie Lösungen linerer Gleichungssystem immer leicht selber kontrollieren können und sollen!

3. (a) $-5a + b + 2c \neq 0$.
   (b) nie.
   (c) $-5a + b + 2c = 0, \dim(\mathcal{L}) = 1$.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - c \\ -a + \frac{c}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Schnitt dreier Ebenen.

   Die erweiterte Matrix

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & 1 & -b \\ a & 0 & b & -1 \\ a & a & 2 & -2 \end{array}\right)$$

liefert nach dem Vertauschen der ersten beiden Zeilen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & -1 \\ 0 & a & 1 & -b \\ a & a & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Addition des (-1)-fachen der ersten Zeile zur dritten liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & -1 \\ 0 & a & 1 & -b \\ 0 & a & 2-b & -1 \end{array}\right)$$

Addition des (-1)-fachen der zweiten Zeile zur dritten ergibt die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & -1 \\ 0 & a & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1-b & b-1 \end{array}\right)$$

in der wir nun eine Fallunterscheidung durchführen müssen.

1. Fall ($a \neq 0, b \neq 1$). In diesem Fall haben wir eine Stufenform gefunden, die wir nun noch reduzieren müssen. Division der letzten Zeile durch $1-b$, die in diesem Fall zulässig ist, liefert die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & -1 \\ 0 & a & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Addition des (-1)-fachen der dritten Zeile zur zweiten ergibt eine reduzierte Stufenform

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & -1 \\ 0 & a & 0 & 1-b \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Division durch die führenden Elemente liefert die normierte, reduzierte Stufenform, aus der wir die eindeutige Lösung des generischen Falls ablesen.

2. Fall ($a = 0, b = 1$). In diesem Spezialfall lautet die letzte berechnete Matrix, bevor wir zur Fallunterscheidung gezwungen waren

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Offenbar muss $z = -1$ sein und die beiden anderen Unbekannten sind frei wählbar.

3. Fall ($a \neq 0, b = 1$). In diesem Spezialfall lautet die berechnete Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nach Voraussetzung dürfen wir durch a dividieren und erhalten als normierte reduzierte Stufenform

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Daraus lesen wir

$$x = -\frac{1}{a} - \frac{1}{a}t, \qquad y = -\frac{1}{a} - \frac{1}{a}t$$

ab.

4. Fall ($a = 0, b \neq 1$). In diesem Spezialfall lautet die bereits berechnete Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & b & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1-b & b-1 \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & b & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Addition des (-1)-fachen der dritten zur zweiten Zeile liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & b & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-b \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Daraus geht hervor, dass das System in diesem Fall keine Lösung hat.

Zusammengefasst:

(a) $a \neq 0$ und $b \neq 1$: Genau eine Lösung.

$$x = \frac{b-1}{a}; \qquad y = \frac{1-b}{a}; \qquad z = -1$$

Die drei Ebenen schneiden sich in einem Punkt.

(b) $a = 0$ und $b = 1$: x, y freie Parameter; $z = -1$. Die drei Ebenen fallen zusammen.

(c) $a \neq 0$ und $b = 1$: $x = -\frac{1}{a} - \frac{1}{a}t, y = -\frac{1}{a} - \frac{1}{a}t$. Die drei Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

(d) $a = 0$ und $b \neq 1$: Keine Lösung. Die drei Ebenen haben keinen Punkt gemeinsam.

5. Ausgehend von der Blockmatrix

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

addieren wir die erste Zeile zum (-2)-fachen der zweiten und erhalten

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Addition der zweiten Zeile zur dritten liefert eine Stufenform

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Offensichtlich ist der Rang 2 und das Lösbarkriterum wird durch die einzige Gleichung $b_1 - 2b_2 + b_3 = 0$ gebildet. Daher ist $B = (1, -2, 1)$. Eine Kontrolle zeigt die Kettenbedingung $B \cdot A = 0$ bzw. $\mathrm{Im}(A) \subseteq \mathrm{Ker}(A)$.

Für die Rückwärtsphase addieren wir die zweite Zeile zur ersten und erhalten die Stufenform

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

deren erste Zeile wir durch 2 dividiert haben. Daraus lesen wir für die Lösung $x_1 = b_1 - b_2 + s; x_2 = -b_1 + 2b_2 - 2s - t; x_3 = s; x_4 = t$ ab. Sie kann nun in der üblichen Weise vektoriell dargestellt werden.

9. In der Blockmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

vertauschen wir die ersten beiden Zeilen und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Addition des (-3)-fachen der ersten Zeile zur zweiten Zeile und Addition des (-1)-fachen der ersten Zeile zur dritten Zeile liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Addition der zweiten Zeile zum (-4)-fachen der dritten Zeile liefert

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Addition der dritten Zeile zum (-5)-fachen der zweiten und zum 10-fachen der ersten Zeile ergibt

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 10 & 30 & 0 & 1 & 11 & -4 \\ 0 & 40 & 0 & -4 & 16 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Addition des (-3)-fachen der zweiten Zeile zum 4-fachen der ersten Zeile liefert

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 40 & 0 & 0 & 16 & -4 & -4 \\ 0 & 40 & 0 & -4 & 16 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Dividieren wir die ersten beiden Zeilen durch 40 und die dritte durch (-10), erhalten wir die reduzierte Stufenform:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

Daraus lesen wir ab: Das Gleichungssystem ist immer lösbar und die Matrix A ist invertierbar. Der Rang von A Rang ist 3. Die drei Spaltenvektoren sind linear unabhängig, weil das zugehörige homomogene System nunr die triviale Lösung hat. Für die eindeutig bestimmte Lösung gilt $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$. Es ist

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} ; \qquad \vec{x} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4b_1 - b_2 - b_3 \\ -b_1 + 4b_2 - b_3 \\ -b_1 - b_2 + 4b_3 \end{pmatrix}$$

Für die Determinante von A erhalten wir wegen

$$(-4) \cdot (-5) \cdot 10 \cdot 4 \cdot \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{40} \cdot (-\frac{1}{10}) = -\frac{1}{20}$$

und weil genau eine Zeilenvertauschung durchgeführt wurde $\det(A) = 20$. Die drei Spaltenvektoren von A bilden ein Rechtssystem.

Zur Berechnung des Eigensystems gehen wir aus von der Matrix

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

und suchen nichttriviale Lösungen des Systems $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$.

Zur Vereinfachung der Rechnung vertauschen wir die ersten beiden Zeilen und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 3-\lambda & 1 \\ 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Addition des $(\lambda-3)$-fachen der ersten Zeile zur zweiten Zeile und Addition des (-1)-fachen der ersten Zeile zur dritten Zeile liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda^2+6\lambda-8 & \lambda-2 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Um unnötige Fallunterscheidungen zu vermeiden, vertauschen wir die zweite und die dritte Zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \\ 0 & -\lambda^2+6\lambda-8 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

Addition des $(\lambda-4)$-fachen der zweiten Zeile zur dritten liefert die Matrix

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2+7\lambda-10 \end{pmatrix}$$

Für das Minimalpolynom ergibt sich $m(\lambda) = \lambda^2-7\lambda+10 = (\lambda-2)(\lambda-5)$ und für das Spektrum $\sigma = \{2, 5\}$. Insbesondere ist $m(A) = 0$. Alternativ kann das normierte charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^3-9\lambda^2+24\lambda-20 = (\lambda-2)^2(\lambda-5)$ benutzt werden.

Für $\lambda = 2$ geht die Matrix $M(\lambda)$ über in

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für den Eigenraum zum Eigenwert 2 erhalten wir

$$V_2 = \{t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

Für $\lambda = 5$ geht die Matrix M über in

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Addition des 2-fachen der zweiten Zeile zum 3-fachen der ersten liefert

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Division der ersten beiden Zeilen durch 3 ergibt schliesslich

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für den Eigenraum zum Eigenwert 5 erhalten wir daher

$$V_5 = \{r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}\}$$

10. (a) $2(1-a^2)$.
    (b) $-2a$.
11. $a=-7$.
12. -1.