Liebe ST18,

nachträglich Ihnen allen ein gutes und erfolgreiches neues Jahr!

Verschiedene Kommilitonen haben mich informiert, dass sie trotz den in der Vorlesung eingebauten Beispiele immer noch Probleme beim Lösen linearer Gleichungssysteme mit Parametern haben. Insbesondere scheint vielen von Ihnen die Aufgabe 5 der Serie 9

> Für welche Werte der beiden Parameter m und n besitzt das Gleichungssystem
> $$\begin{cases} 4x - my + z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ mx - y - z = n \end{cases}$$
>
> 1. Genau eine Lösung?
> 2. Keine Lösung.
> 3. Unendlich viele Lösungen.
>
> Lösen Sie das System für alle lösbaren Fälle.

Kopfzerbrechen zu machen.

Lassen Sie mich dazu Folgendes ergänzen.

Prinzipiell ist das Vorgehen analog zum sorgfältigen Testen eines Programms mit Bedingungen. Man versucht so lange wie möglich, das besprochene Eliminationsverfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme zu verwenden und versucht dabei, Operationen vom Typ III zu vermeiden, die einen Faktor benutzen, der 0 sein könnte. Falls das nicht möglich ist, macht man eine Fallunterscheidung, indem man einerseits annimmt, der heikle Faktor sei 0 bzw. andererseits von 0 verschieden und rechnet damit vorsichtig weiter. Weil wir in der linearen Algebra sind, benötigen Sie neben etwas Logik nur Additionen und Multiplikationen.

Meiner Erfahrung nach liegt das Problem vieler darin, dass sie in der Schule nie sorgfältig und vorausschauend rechnen und noch weniger sorgfältig logisch denken gelernt haben. Das ist das Einzige, was Aufgaben dieser Art von Ihnen verlangen. Versuchen Sie es also nochmals — und wie gesagt: *gaaaanz* sorgfältig und nicht in erster Linie auf das Tempo achten!

Nun zum konkreten Beispiel.

Ausgehend von der erweiterten Matrix

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -m & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ m & -1 & -1 & n \end{array}\right)$$

vertauschen wir im ersten Schritt die ersten beiden Zeilen. Das ist eine Operation vom Typ I und damit harmlos. Das Ergebnis ist die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & -m & 1 & 1 \\ m & -1 & -1 & n \end{array}\right)$$

Der Vorteil dieses ersten Schrittes besteht darin, dass wir nun für das erste führende Element 2 wählen können und die erste Zeile der entstehenden Matrix keinen Parameter enthält. Durch Addition des (-2)-fachen der ersten Zeile zur zweiten eliminieren wir das Element an der Stelle $(2,1)$. Es ist eine Operation vom Typ II und damit unbedenklich. Um das Element an der Stelle $(3,1)$ zu eliminieren, möchten wir das $(-m)$-fache der ersten Zeile zum 2-fachen der dritten addieren. Dabei handelt es sich wiederum um eine Operation vom Typ II, die unbedenklich ist! Das Ergebnis dieser beiden Operationen ist

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2-m & -1 & -5 \\ 0 & m-2 & -m-2 & 2n-3m \end{array}\right)$$

auch die Addition der zweiten Zeile zur dritten ist vom Typ II und damit unbedenklich und liefert die im linken Block die Stufenform

$$S(m,n) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2-m & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -m-3 & 2n-3m-5 \end{array}\right)$$

Weil alle bisherigen Operationen ohne wenn und aber umkehrbar waren, haben also das ursprüngliche und das erhaltene Gleichungssystem genau die selbe Lösungsmenge. Für die Determinante der Koeffizientenmatrix gilt $\det(A) = 6 - m - m^2 = (m+3)(2-m)$.

Ein Blick auf die Kandidaten für die führenden Elemente zeigt uns, dass wir nun Fälle unterscheiden müssen.

1. Falls $m \neq -3$ und $m \neq 2$ ist, hat die Koeffizientenmatrix der Stufenform den Rang 3 und damit hat dann das lineare Gleichungssystem eine eindeutige Lösung, die wir nun berechnen wollen.

   Wir nehmen nun an, die Voraussetzungen dieses (Normal-) Falls seien erfüllt. Deshalb dürfen wir die zweite Zeile durch $2 - m \neq 0$ und die dritte durch $m + 3 \neq 0$ dividieren. Obwohl es sich dabei um Operationen vom Typ III handelt, sind sie unbedenklich, da wir ja angenommen haben, dass diese beiden Faktoren nicht 0 sind. Wir erhalten die Matrix

   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{m-2} & \frac{5}{m-2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3m-2n+5}{m+3} \end{array}\right)$$

   Addition des $\frac{1}{2-m}$-fachen der dritten Zeile zur zweiten und des (-1)-fachen der dritten Zeile zur ersten liefert

   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & \frac{2(n+2)}{m+3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2(m+n+5)}{m^2+m-6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3m-2n+5}{m+3} \end{array}\right)$$

   Addition des (-1)-fachen der zweiten Zeile zur ersten liefert

   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & \frac{2(n+2)}{m+3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2(m+n+5)}{m^2+m-6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3m-2n+5}{m+3} \end{array}\right)$$

Division der ersten Zeile durch 2 liefert im linken Faktor die normierte reduzierte Stufenform

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{(m-1)n+3\,m+1}{m^2+m-6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2\,(m+n+5)}{m^2+m-6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3\,m-2\,n+5}{m+3} \end{array}\right)$$

aus der wir für die eindeutig bestimmte Lösung ablesen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{(m-1)n+3\,m+1}{m^2+m-6} \\ \frac{2\,(m+n+5)}{m^2+m-6} \\ \frac{3\,m-2\,n+5}{m+3} \end{pmatrix}$$

Offenbar müssen wir nun noch die beiden Sonderfälle gesondert untersuchen.

2. Falls $m = -3$ ist, lautet die Stufenform nach Einsetzen dieses Wertes

$$S(-3, n) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2n+4 \end{array}\right)$$

Aus der letzten Zeile dieser Matrix erkennen wir, dass das Gleichungssystem nur dann eine Lösung haben kann, falls $2n + 4 = 0$ ist. Wir erhalten also zwei Unterfälle.

(a) Falls $n = -2$ ist, ist der Rang der Koeffizientenmatrix 2 und wir werden eine 1-dimensionale Lösungsmenge erhalten. Dann gilt für die Stufenform

$$S(-3, -2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Addition der zweiten zum (-5)-fachen der ersten Zeile liefert

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 5 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Division der ersten Zeile durch 10 und der zweiten Zeile durch 5 liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Daraus lesen wir die 1-dimensionale Lösungsmenge

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ab.

(b) Falls $n \neq -2$ ist, hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

3. Falls $m = 2$ ist, lautet die Stufenform nach Einsetzen dieses Wertes

$$S(2,n) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 2n-11 \end{array}\right)$$

Addition des (-5)-fachen der zweiten Zeile zur dritten ist eine Operation vom Typ II und damit unbedenklich. Wir erhalten die Stufenform

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2n+14 \end{array}\right)$$

Aus der letzten Zeile dieser Matrix erkennen wir, dass das Gleichungssystem nur dann eine Lösung haben kann, falls $2n + 14 = 0$. Wir erhalten wieder zwei Unterfälle.

(a) Falls $n = -7$ ist, ist der Rang der Koeffizientenmatrix 2 und wir werden eine 1-dimensionale Lösungsmenge erhalten. Dann ist

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Addition der zweiten Zeile zur ersten liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Division der ersten Zeile durch 2 und Multiplikation der zweiten mit (-1) liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Daraus lesen wir die 1-dimensionale Lösungsmenge

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ab.

(b) Falls $n \neq -7$ ist, hat das Gleichungssystem keine Lösung.

Selbstverständlich lassen sich diese Rechnungen mit Hilfe von Sage durchführen.

Mit freundlichen Grüssen

Markus Pfenniger